L2 PC
Math 3, TD 2

Exercice 1

Les sous-ensenbles de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:
a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, .
b) $E_2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$

Exercice 2

a) Est-il possible d'exprimer $v = (1, 4) \in \mathbb{R}^2$ comme une combinaison linéaire des deux vecteurs $v_1 = (0, 1)$ et $v_2 = (1, 1)\}$? Autrement dit, v appartient-il au $sev < v_1, v_2 >$?
b) Est-il possible d'exprimer $v = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ comme une combinaison linéaire des trois vecteurs $v_1 = (1, -3, 2), v_2 = (2, -4, -1)$ et $v_3 = (1, -5, 7)$?

Exercice 3

Les familles de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?
a) $u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (2, 1, -1)$ et $u_3 = (7, -4, 1)$.
b) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 2, 2)$ et $v_3 = (3, 7, 1)$.
c) $w_1 = (1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 1)$ et $w_3 = (1, 1, 1)$.

Exercice 4

Soient $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$ trois vecteurs de R^3.
a) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Même question pour les couples (v_1, v_3) et (v_2, v_3).
b) La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?

Exercice 5

Soient $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
a) Montrer que $B = \{u_1, u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Déterminer les coordonnées de $u = (3, 4)$ dans la base B.

Exercice 6

a) Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $u = (1, 1, 1)$.
b) Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre, qui n'est pas génératrice.
c) Dans $\mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille génératrice, qui n'est pas libre.

Exercice 7

Les 3 vecteurs de R^3, $u = (1, 1, 1),\ v = (1, 2, 3)$ et $w = (2, -1, 1)$, forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8

Soit $V = sev < (1, 0, 3, 2), (0, 0, -1, 2) >$ un sous vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Trouver W un sous vectoriel de $\mathbb{R}^4$ tel que $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 9

On considère l'espace vectoriel V des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $e^x, \ldots, e^{nx}$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 10

Soit X, Y, Z trois sous espaces d'un vectoriel finidimensionnel V. Exprimer $dim(X + Y + Z)$ en fonction de $dim(X),\ dim(Y),\ dim(Z)$.